**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**

**СОВЕТ РЕКТОРОВ ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ**

**ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018-2019**

**МАТЕМАТИКА (8 КЛАСС)**

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

**1 ВАРИАНТ**

**(ОТВЕТЫ)**

**1.** Вычислите:

$$\frac{2⋅2019}{1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+⋅⋅⋅+\frac{1}{1+2+⋅⋅⋅+2019}} $$

**(7 баллов)**

**Ответ: 2020.**

**Решение:**
$$\frac{2⋅2019}{1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+⋅⋅⋅+\frac{1}{1+2+⋅⋅⋅+2019}}=\frac{2⋅2019}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+⋅⋅⋅+\frac{1}{1010⋅2019}}= $$

$$=\frac{2019}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+⋅⋅⋅+\frac{1}{2020⋅2019}}=\frac{2019}{\frac{1}{1⋅2}+\frac{1}{2⋅3}+\frac{1}{3⋅4}+\frac{1}{4⋅5}+⋅⋅⋅+\frac{1}{2019⋅2020}}=$$

$$=\frac{2019}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+⋅⋅⋅+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}}=\frac{2019}{1-\frac{1}{2020}}=2020.$$

**2.** Найдите все пары чисел $\left(a,b\right)$, при которых функция
$$f\left(x\right)=\frac{\left(a+5b\right)x+a+b}{ax+b}$$

постоянна во всей области ее определения. **(7 баллов)**

**Ответ:** $a=\pm \sqrt{5}b, b\ne 0.$

**Решение:**

Отметим сначала, что при $a=b=0$ функция $f\left(x\right)$ не определена ни для одного значения $x. $ Если $a=0, b\ne 0$, то получаем $f\left(x\right)=5x+1 $и $f\left(x\right)$ не является постоянной, значит, $a\ne 0.$

Пусть теперь при всех $x$ из области определения $D\left(f\right)$ функции $f\left(x\right)$, то есть при всех $x\ne -\frac{b}{a}$ выполняется равенство $f\left(x\right)$=*k*. Тогда, учитывая представление $f\left(x\right),$ получим

$ \left(a+5b\right)x+a+b=kax+kb$, или$ \left(a+5b-ka\right)x+\left(a+b-kb\right)=0 при всех $ $x\in D\left(f\right).$

А это возможно тогда и только тогда, когда выполнятся следующая система уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c}a+5b-ka=0,\\a+b-kb=0.\end{array}\right.$$

Откуда получаем $a=\left(k-1\right)b, и затем \left(k^{2}-2k-4\right)b=0.$ Если $b=0$, то и $a=0$, чего быть не может, как отмечалось выше, следовательно,

$ k^{2}-2k-4=0$, $ k=1\pm \sqrt{5}, a=\left(k-1\right)b=\pm \sqrt{5}b, где b\ne 0.$

**3.** Решите в целых числах уравнение:

$x^{2}-xy-2y^{2}=7 .$  **(7 баллов)**

**Ответ:** $\left\{\left(3;-2\right), \left(5;2\right),(-3;2), (-5;-2)\right\}$

**Решение:**

Разложим левую часть уравнения, например, с помощью группировки, на множители:

$x^{2}-xy-2y^{2}=x^{2}-y^{2}-xy-y^{2}=\left(x+y\right)\left(x-y\right)-y\left(x+y\right)=\left(x+y\right)\left(x-2y\right)$*.* Откуда получим следующий вид исходного уравнения:

$\left(x+y\right)\left(x-2y\right)=7$*.*

Учитывая, что *x* и *y* ─ целые числа, а число 7 ─ простое число, решение уравнения сводится к решению четырех систем:

$\left\{\begin{array}{c}x+y=1,\\x-2y=7, \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x+y=7,\\x-2y=1, \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x+y=-1,\\x-2y=-7, \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x+y=-7,\\x-2y=-1. \end{array}\right.$

$$Решая эти системы уравнений, получаем четыре пары решений: $$

$$ \left(3;-2\right), \left(5;2\right), \left(-3;2\right), \left(-5;-2\right).$$

**Замечание:** за каждое правильное решение, найденное подбором – 1балл.

**4.** Из городка *«Ух»* в городок *«Ах» в* $10^{00} $утра выехал Иван на своем велосипеде, проехав две трети пути, он миновал городок *«Ох»*, из которого в этот момент времени в городок *«Ух»* отправился Петр пешком. В тот момент времени, когда Иван прибыл в городок *«Ах»*, оттуда в обратном направлении выехал Николай на своем велосипеде и прибыл в городок *«Ух»* в$11^{00} $утра этого же дня.В скольких километрах от городка *«Ах»* Николай догнал Петра, если Петр прибыл в городок *«Ух»*  в $12^{00} $утра того же дня, при этом скорость каждого участника движения была постоянной, а расстояние между городками *«Ух»* и *«Ах»* составляет всего10 км.  **(7 баллов)**

**Ответ:** $6 км.$

**Решение:**

Решим задачу графически-геометрическим способом. Изобразим графики движения Ивана через отрезок *KL*, Николая через отрезок *LM* и Петра через отрезок *NP* в системе координат (*t; s*), где *t* ─ время в часах, *s* ─ расстояние в километрах от пункта A (рис.1). Пусть *Q* — точка пересечения *LM* и *NP*. По условию *MK* = 2 и *PM* = 1. Проведём *MG* ∥ *NQ*, *G* ∈ *KL*, тогда по теореме Фалеса имеем

*NG* : *GK* = *PM* : *MK* = 1 : 2 .

Тогда, если *NG* = 2*x*, то *GK* = 4*x*, а *LN* = 3*x*. Откуда опять по теореме Фалеса имеем

*LQ* : *QM* = *LN* : *NG* = 3*x* : 2*x* = 3 : 2 .

Таким образом, искомое расстояние равно $\frac{3}{5}$·10 = 6 (км.)

Отметим, что при поиске отношения *LQ* : *QM* можно использовать теорему Менелая. Точки *N*, *Q* и *P* лежат на одной прямой, поэтому$ \frac{KN}{NL}·\frac{LQ}{QM}·\frac{MP}{PK}=1$ или $\frac{2}{1}·\frac{LQ}{QM}·\frac{1}{3}=1$. Следовательно, $\frac{LQ}{QM}=\frac{3}{2}$.

**5.** Одна сторона некоторого треугольника в два раза больше другой, а периметр этого треугольника равен 60, наибольшая его сторона в сумме с учетверенной наименьшей равна 71. Найдите стороны этого треугольника.  **(7 баллов)**

**Ответ:** **11, 22, 27.**

**Решение:**

Обозначим через *a*, *b*, c стороны треугольника, без ограничения общности, будем считать, что *a* $\leq $*b* $\leq $c*.* Учитывая условие задачи, запишем систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c}a+b+с=60,\\4a+с=71.\end{array}\right.$$

Так как одна из сторон треугольника в 2 раза больше другой, то рассмотрим три возможных случая.

1) Если c=2*b*, то $a+b\leq 2b=с$*.* Следовательно, не выполняется неравенство треугольника

$ a+b>с$, необходимое для существования треугольника.

2) Если c=2*a*, то из второго условия системы находим $6a=71, a=\frac{71}{6}, тогда с=\frac{71}{3}$*.*

Затем находим значение *b* из первого уравнения $b=\frac{147}{6}, откуда следует b>с,$ $что противоречит, что a \leq b \leq c. $

3) Если *b*=2*a*, то система запишется в виде:

$$\left\{\begin{array}{c}3a+с=60,\\4a+с=71.\end{array}\right.$$

Откуда $a=11, с=27, b=22. $ Полученное решение удовлетворяет всем условиям задачи.

**Замечание:** за правильное решение, найденное подбором – 1балл.

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**

**СОВЕТ РЕКТОРОВ ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ**

**ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018-2019**

**МАТЕМАТИКА (8 КЛАСС)**

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

**2 ВАРИАНТ**

**(ОТВЕТЫ)**

**1.** Вычислите:

$$\frac{2⋅2018}{1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+⋅⋅⋅+\frac{1}{1+2+⋅⋅⋅+2018}} (7 баллов)$$

**Ответ: 2019.**

**Решение:** аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

**2.** Найдите все пары чисел $\left(a,b\right)$, при которых функция
$$f\left(x\right)=\frac{\left(2a+3b\right)x+a+2b}{ax+b}$$

постоянна во всей области ее определения.  **(7 баллов)**

**Ответ:** $a=\pm \sqrt{3}b, b\ne 0.$

**Решение:** аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

**3.** Решите в целых числах уравнение: $x^{2}-xy-2y^{2}=7 .$ **(7 баллов)**

**Ответ:** $\left\{\left(3;-2\right), \left(5;2\right),(-3;2), (-5;-2)\right\}$

**Решение:** решение этой задачи полностью совпадает с решением задачи в варианте 1 под тем же номером.

**Замечание:** за каждое правильное решение, найденное подбором – 1балл.

**4.** Из городка *«Ух»* в городок *«Ах» в* $11^{00} $утра выехал Иван на своем велосипеде, проехав две пятых пути, он миновал городок *«Ох»*, из которого в этот момент времени в городок *«Ух»* отправился Петр пешком. В тот момент времени, когда Иван прибыл в городок *«Ах»*, оттуда в обратном направлении выехал Николай на своем велосипеде и прибыл в городок *«Ух»* в$12^{00} $этого же дня.В скольких километрах от городка *«Ах»* Николай догнал Петра, если Петр прибыл в городок *«Ух»*  в $13^{30} $того же дня, при этом скорость каждого участника движения была постоянной, а расстояние между городками *«Ух»* и *«Ах»* составляет всего

7 км. **(7 баллов)**

**Ответ:** $5 км.$

**Решение:** аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

**5.** Одна сторона некоторого треугольника в два раза больше другой, а периметр этого треугольника равен 56, учетверенная наименьшая сторона на 21 длиннее наибольшей из сторон. Найдите стороны этого треугольника.  **(7 баллов)**

**Ответ: 11, 22, 23.**

**Решение:** аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

**Замечание:** за правильное решение, найденное подбором – 1балл.

**Критерии оценивания приведены в таблице:**

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Критерии оценивания |
| **7** | Полное обоснованное решение. |
| **6** | Обоснованное решение с несущественными недочетами. |
| **5-6** | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.  |
| **2-3** | Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи. |
| **1** | Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.  |
| **0** | Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. |